

Badanie rozkładu temperatury
w nagrzewanym pręcie

1 Oznaczenia

- a - dyfuzyjność termiczna (współczynnik wyrównywania temperatury) $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
- A - pole przekroju pręta, m^2
- c_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$
- d - średnica, m
- l - długość, m
- P - obwód, m
- t - temperatura pręta, $^{\circ}\text{C}$
- t_a - temperatura powietrza otoczenia, $^{\circ}\text{C}$
- t_i - początkowa temperatura pręta, $^{\circ}\text{C}$
- t_s - temperatura nagrzewanej powierzchni pręta, $^{\circ}\text{C}$
- \dot{q} - gęstość strumienia ciepła, $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
- \dot{Q}_0 - strumień ciepła dostarczany do pow. czołowej pręta, W
- \dot{Q}_x - strumień przewodzonego ciepła przez pręt na długości od 0 do x , W
- \dot{Q}_{x+dx} - strumień przewodzonego ciepła przez pręt na elementarnej długości pręta dx , W
- x - współrzędna skierowana w kierunku długości pręta, m
- ϑ - nadwyżka temperatury pręta nad temperaturę otaczającego płynu, K
- ϑ_0 - nadwyżka temperatury pręta dla $x = 0$ nad temperaturę otaczającego płynu, K
- λ - współczynnik przewodzenia ciepła, $\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$
- ρ - gęstość, $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- τ - czas, s

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie rozkładu temperatury na długości nagrzewanego metalowego pręta. Rozkład temperatury będzie wyznaczony eksperymentalnie, analitycznie oraz numerycznie.

2. Wprowadzenie teoretyczne

2.1. Ustalone przewodzenie ciepła w pręcie

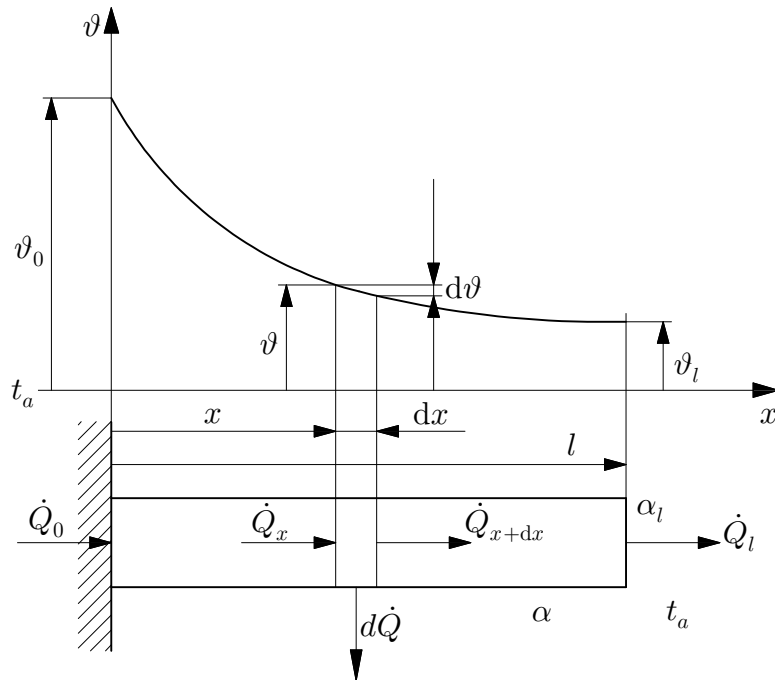
Przewodzenie ciepła to zjawisko zachodzące w ciałach stałych, polegające na przekazywaniu ciepła przez stale stykające się ze sobą te same cząsteczki ciała. Gęstość przewodzonego strumienia ciepła określa **prawo Fouriera**

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

Za pomocą **współczynnika przewodzenia ciepła λ** charakteryzuje się materiały pod względem możliwości przewodzenia ciepła i określa wartość mocy cieplnej przewodzonej przez przegrodę o powierzchni 1 m^2 na długości 1 m przy jednostkowym spadku temperatury [1], [2].

Rozpatrzmy proces wymiany ciepła przez pręt o długości l i o stałym profilu przekroju poprzecznego (pole przekroju $A = \text{const}$ i obwód przekroju poprzecznego pręta $P = \text{const}$) pokazany na rys. 1.

Jeden koniec pręta jest zamocowany, a pozostałe jego powierzchnie są otoczone płynem o temperaturze t_a . Ponadto zakłada się, że temperatura zmienia się tylko w kierunku osi x (tzn. w dowolnym przekroju poprzecznym pręta temperatura jest stała). Można przyjąć takie założenie, ponieważ powierzchnia czołowa jest znacznie mniejsza od powierzchni bocznej pręta, a materiałem, z którego wykonano pręt jest metal, a więc materiał o wysokiej wartości współczynnika przewodzenia ciepła λ .



Rys. 1 Rozkład temperatury oraz strumieni ciepła przy przewodzeniu ciepła przez pręt [3]

Nadwyżka ϑ temperatury pręta t nad temperaturą otaczającego pręta t_a wyraża się wzorem

$$\vartheta = t - t_a \quad (2)$$

Przy ustalonej wymianie ciepła bilans cieplny elementarnej długości pręta dx ma postać

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} = d\dot{Q} \quad (3)$$

Gdzie zgodnie z prawem Fouriera

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{d\vartheta}{dx} \quad (4)$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A \frac{d}{dx} \left(\vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) \quad (5)$$

i zgodnie z prawem Newtona

$$d\dot{Q} = \alpha \cdot \vartheta \cdot P \cdot dx \quad (6)$$

Podstawiając wzory (4), (5), (6) do bilansu (3) otrzymujemy

$$-\lambda A \frac{d\vartheta}{dx} - \lambda A \frac{d}{dx} \left(\vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) = \alpha \cdot \vartheta \cdot P \cdot dx \quad (7)$$

skąd otrzymuje się równanie różniczkowe

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\lambda A} \vartheta \quad (8)$$

W celu ułatwienia kolejnych przekształceń wprowadza się

$$m = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda A}} \quad (9)$$

więc równanie (9) przyjmuje postać

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = m^2\vartheta \quad (10)$$

Uwzględniając wcześniejsze założenia, że współczynnik przewodzenia ciepła λ , obwód P oraz pole przekroju poprzecznego pręta A są stałe i dodatkowo założymy, że współczynnik przejmowania ciepła α od bocznych powierzchni pręta też jest stały to $m = \text{const}$ [3].

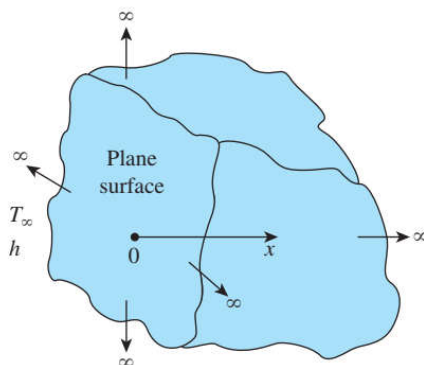
Przyjmując dodatkowo uproszczenie, że na powierzchni czołowej pręta nie zachodzi wymiana ciepła (powierzchnia czołowa jest znacznie mniejsza od powierzchni bocznej, a ponadto na końcu pręta temperatura jest zbliżona do temperatury powietrza otaczającego) otrzymujemy następujące wzory

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\cosh m(l-x)}{\cosh ml} \quad (11)$$

$$\dot{Q}_0 = \lambda A m \vartheta_0 \tanh ml \quad (12)$$

2.2. Nieustalone przewodzenie ciepła w ciele półnieskończonym

Ciałem półnieskończonym określamy wyidealizowane ciało, które ma jedną płaską powierzchnię i rozciąga się do nieskończoności we wszystkich pozostałych kierunkach, jak pokazano na rys. 4. To wyidealizowane ciało pozwala na łatwe obliczenie zmian temperatury w części ciała, którą jesteśmy zainteresowani tj. w obszarze blisko powierzchni, na której zadajemy warunek brzegowy [4].



Rys. 2 Ciało półnieskończone [4]

Między innymi ziemię można uznać za półnieskończone medium w określaniu zmian temperatury w pobliżu jej powierzchni, gdyż najczęściej jesteśmy zainteresowani zmianą temperatury jedynie w pobliżu jej powierzchni, natomiast druga powierzchnia ziemi jest zbyt daleko, aby mieć jakikolwiek wpływ na wymianę ciepła w obszarze będący przedmiotem zainteresowania. Przez krótki czas większość ciał może być modelowana jako półnieskończone ciała stałe, ponieważ ciepło nie ma wystarczającej ilości czasu, aby wniknąć głęboko w ciało, a grubość ciała nie wchodzi w analizę wymiany ciepła. Na przykład kawałek stali o dowolnym kształcie można traktować, jako półnieskończone ciało stałe, gdy jest szybko hartowane w celu utwardzenia jego powierzchni. Ciało, którego powierzchnia jest podgrzewana za pomocą impulsu laserowego, może być również traktowane w ten sam sposób [4].

Dla stałych własności termofizycznych równanie różniczkowe rozkładu temperatury $t(x, \tau)$ jest wyrażone wzorem:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (13)$$

Przyjmując warunek brzegowy

$$t(0, \tau) = t_s \text{ i } t(x \rightarrow \infty, \tau) = t_i,$$

oraz warunek początkowy

$$t(x, 0) = t_i$$

Rozwiązując ten problem metodą transformacji Laplace'a otrzymuje się następujące warianty pozwalające na wyliczenie temperatury w dowolnym punkcie i czasie ciała półnieskończonego.

Wariant 1: Określona temperatura rozpatrywanej powierzchni,

$t_s = \text{const.}$

$$\frac{t(x, \tau) - t_i}{t_s - t_i} = \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} \right) \quad (14)$$

oraz

$$\dot{q}_s(\tau) = \frac{\lambda(t_s - t_i)}{\sqrt{\pi a \cdot \tau}} \quad (15)$$

Wariant 2: Określona gęstość strumienia ciepła na rozpatrywanej powierzchni, $\dot{q}_s = \text{const.}$

$$t(x, \tau) - t_i = \frac{\dot{q}_s}{\lambda} \left[\sqrt{\frac{4a \cdot \tau}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{4a \cdot \tau} \right) - x \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} \right) \right] \quad (16)$$

Wariant 3: Konwekcyjna wymiana ciepła na rozpatrywanej

$$\begin{aligned} & \text{powierzchni, } \dot{q}_s(\tau) = \alpha[t_\infty - t(\mathbf{0}, \tau)] \\ \frac{t(x, \tau) - t_i}{t_\infty - t_i} &= \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right) \\ & - \exp\left(\frac{\alpha \cdot x}{\lambda} + \frac{\alpha^2 a \cdot \tau}{\lambda^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right. \\ & \left. + \frac{\alpha\sqrt{a \cdot \tau}}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

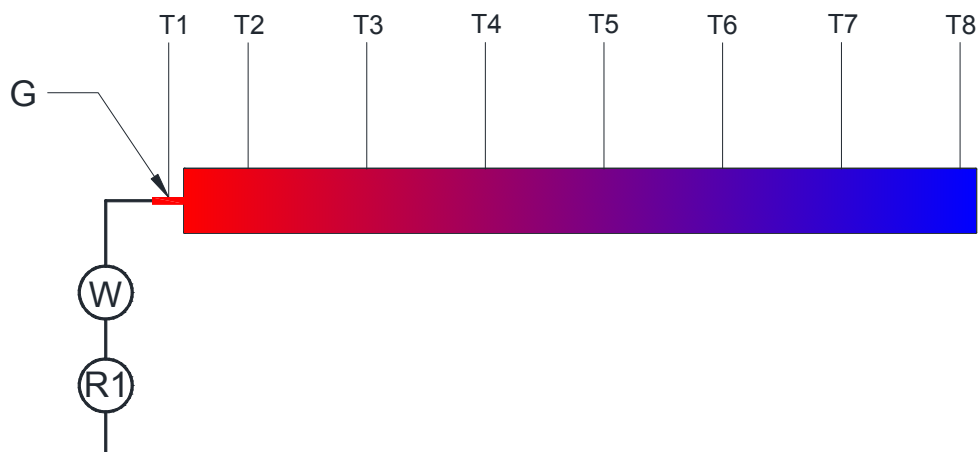
Wariant 4: Impuls energii na rozpatrywanej powierzchni, $e_s = \text{const.}$

$$t(x, \tau) - t_i = \frac{e_s}{\lambda\sqrt{\pi\tau/a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a \cdot \tau}\right) \quad (18)$$

3. Pomiar rozkładu temperatury na długości metalowego pręta

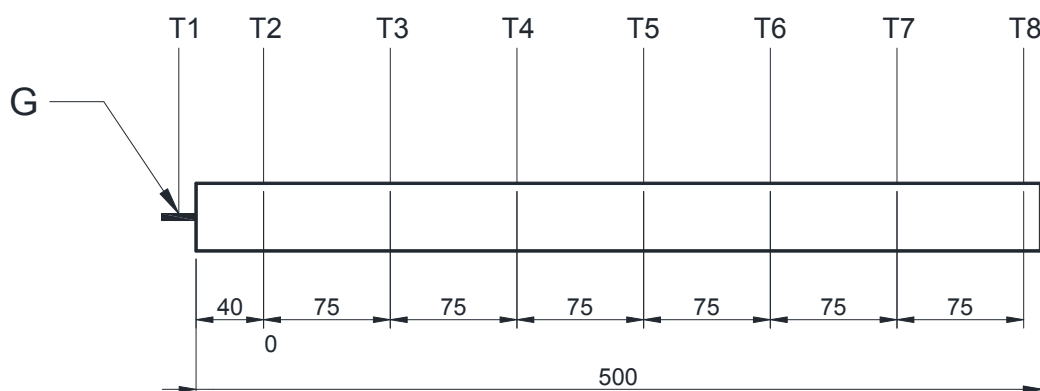
3.1. Stanowisko pomiarowe

Stanowisko pomiarowe zostało przedstawione schematycznie na rys. 3. Głównym jego elementem jest pręt metalowy o długości $l = 500$ mm i średnicy $d = 22$ mm. Do jednego końca pręta przymocowana jest grzałka elektryczna. Prąd płynący przez grzałkę elektryczną G regulowany jest przy użyciu regulatora $R1$. Wzrost prądu płynącego przez grzałkę elektryczną powoduje podniesienie temperatury pręta. Do pomiaru temperatury wykorzystano termoelementy typu T (Cu-CuNi). Termoelement T1 mierzy temperaturę grzałki, a termoelementy od T2 do T8 temperaturę powierzchni pręta na jego długości. Na rys. 4 jest pokazane dokładnie rozmieszczenie poszczególnych termoelementów.



Rys. 3 Schemat stanowiska pomiarowego

T1-T8 - czujniki temperatury, R1 - regulator mocy grzałki,
W - pomiar mocy, G - grzałka elektryczna.



Rys. 4 Rozmieszczenie termoelementów na pręcie

3.2. Wykonanie pomiarów

Pomiary wykonać dla mocy grzałki podanej przez prowadzącego. Za temperaturę powietrza t_a panującą w laboratorium przyjąć średnią temperaturę pręta przed rozpoczęciem nagrzewania (czyli najpierw zaczynamy rejestrować temperaturę, a dopiero później włączamy grzałkę).

Uwaga! Ponieważ stanowisko badawcze jest bardzo wrażliwe na warunki zewnętrzne należy zachować szczególną ostrożność, aby nie spowodować dodatkowej cyrkulacji powietrza (zamknięte okna i drzwi, nie przemieszczanie się w pobliżu stanowiska laboratoryjnego). Dodatkowy ruch powietrza w pobliżu układu pomiarowego powoduje zwiększony udział konwekcyjnej wymiany ciepła.

4. Wyznaczenie rozkładu temperatury na długości nagrzewanego pręta z rozwiązania analitycznego

W celu wyznaczenia rozkładu temperatury na długości nagrzewanego pręta z rozwiązania analitycznego przyjmujemy uproszczenie, że rozpatrywany pręt jest ciałem półnieskończonym (tj. wymiana ciepła następuje tylko na długości pręta). Dzięki takiemu założeniu możemy skorzystać z zależności (16) w celu określenia rozkładu temperatury pręta w dowolnym punkcie na jego długości oraz w dowolnym czasie.

5. Wyznaczenie rozkładu temperatury na długości nagrzewanego pręta z wykorzystaniem modelu numerycznego

W celu wyznaczenia rozkładu temperatury na długości nagrzewanego pręta z wykorzystaniem programu **walec_32.exe**, trzeba najpierw przygotować pliki wsadowe **tpomiar.dat** oraz **alfao.inp**.

W pliku **tpomiar.dat** powinna się znaleźć wyznaczona eksperymentalnie temperatura na długości nagrzewanego pręta w kolejnych krokach czasowych. W kolumnach powinny być zapisane kolejno: czas, poszczególne temperatury.

Uwaga! W tym pliku pomijamy wyniki z termopary 1 (to jest temperatura grzałki) oraz wyniki pomiaru grzałki elektrycznej.

W pliku **alfao.inp** należy ustawić odpowiednio zmienne zgodnie z opisem znajdującym się w pliku oraz z wytycznymi prowadzącego.

- NASET** - zmienna sterująca o wartości od 1 do 5:
1 - **chłodzenie pręta w powietrzu.**
- NMATER** - numer materiału próbki od 1 do 10:
2 - **mosiądz.**

Po uzupełnieniu obu plików należy uruchomić program **walec_32.exe**. Po zakończeniu obliczeń wyniki zostaną zapisane w pliku **temp.dat**.

6. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać:

- Cel ćwiczenia;
- Schemat stanowiska pomiarowego;
- Wykres pokazujący wyniki pomiarów temperatury z poszczególnych termopar umieszczonych na powierzchni walca $t = f(\tau)$ oraz na tym samym wykresie moc grzałki w czasie $\dot{Q}_0 = f(\tau)$;
- Przedstawienie toku obliczeń temperatury w wybranym punkcie na długości pręta i czasie z przykładowymi podstawieniami do wzorów;
- Wykresy pokazujące rozkład temperatury na długości pręta uzyskany: z pomiarów, z obliczeń analitycznych i numerycznych dla dwóch wybranych punktów na długości pręta, co 50s $t = f(x)$;
- Uwagi i wnioski.

7. Zakres materiału obowiązującego do zaliczenia

Temperatura; budowa i zasada działania termoelementu; sposoby przekazywania ciepła; ustalone i nieustalone przewodzenie ciepła; prawo Fouriera; wsp. przewodzenia ciepła; opór przewodzenia ciepła.

8. Literatura

- [1] Krystyna Krygier, Tomasz Klinke, Jerzy Sewerynik „Ogrzewnictwo, wentylacja, klimatyzacja” Warszawa : Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2000
- [2] Stefan Wiśniewski, Tomasz S. Wiśniewski „Wymiana ciepła” Warszawa : Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2000
- [3] Wiesław Pudlik „Wymiana i wymienniki ciepła” Gdańsk : Politechnika Gdańska, 2012
- [4] Yunus A. Cengel, Afshin J. Ghajar „Heat and Mass Transfer. Fundamentals & Applications” McGraw-Hill Education, New York, 2015
- [5] <http://www.metale-kolorowe.eu/>

Załącznik 1 - Własności fizyczne mosiądzu M70[5]

Oznaczenia mosiądzu M70 wg innych norm (odpowiedniki):

Oznaczenie wg DIN:	CuZn30
Oznaczenie wg ASTM:	C26000
EN nr:	CW505L
Oznaczenie wg PN:	M70

Skład chemiczny mosiądzu M70 i jego zastosowanie:

Cu	69 ÷ 71 %
Al	≤ 0,02 %
Fe	≤ 0,05 %
Ni	≤ 0,3 %
Pb	≤ 0,05 %
Sn	≤ 0,1 %
Zn	- reszta

Mosiądz M70 jest bardziej podatny do obróbki plastycznej na zimno niż stop M67 na co wpływ ma większa zawartość miedzi. Mosiądz M70 charakteryzuje się dobrą odpornością na korozję jednakże w środowisku kwaśnym może nastąpić odcynkowanie. Jest stosowany w głównej mierze do produkcji w procesach obróbki plastycznej. Wykonuje się z niego: rdzenie chłodnic i zbiorników, lampy, misy, tace, elementy galanterii metalowej, podzespoły dla energetyki i elektroniki, elementy głęboko tłoczne.

Własności fizyczne mosiądzu M70:

Gęstość:	$8,55 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$
Moduł sprężystości E:	114 GPa
Ciepło właściwe:	$377 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$
Współczynnik rozszerzalności cieplnej:	$19,7 \frac{10^{-6}}{\text{K}}$
Przewodność cieplna:	$126 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$